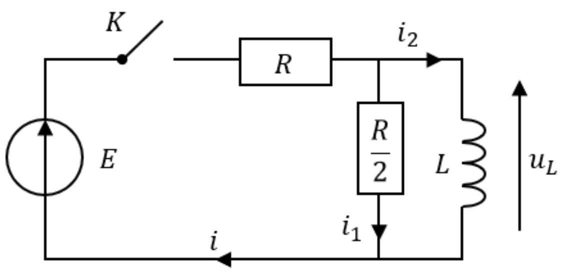
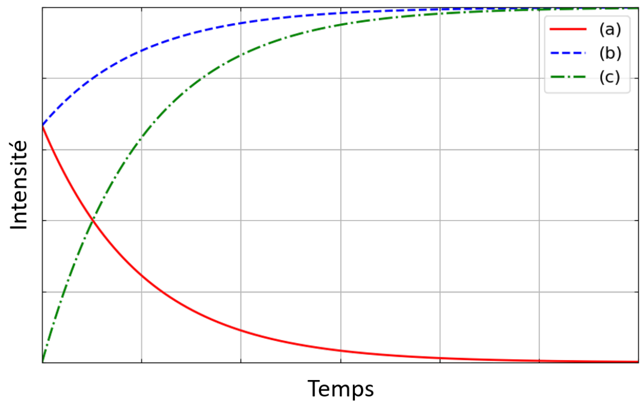
TPC1 2025/2026 – Correction du DM Physique n°2

I) Circuit RL à deux mailles

Dans le circuit représenté ci-dessous le générateur de tension a une force électromotrice constante $E = 3$ V et $R = 1$ kΩ. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K qui était ouvert depuis très longtemps.



1) On donne l'allure de $i(t)$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$. Identifier les courbes correspondantes.



Correction

Pour $t = 0^-$, toutes les intensités sont nulles. Par continuité de i_2, on en déduit que $i_2(0^+) = 0$. La seule possibilité est la courbe (c).

Remarque : une loi des nœuds donne

$$i = i_1 + i_2 \quad \Rightarrow \quad i(0^+) = i_1(0^+)$$

Ce qui est bien observé sur le graphe.

Lorsque $t \to \infty$, la bobine devient équivalente à un fil. La résistance $R/2$ est donne court-circuitée, aucun courant ne la traverse : $i_1(\infty) = 0$. Il s'agit de la courbe (a).

Remarque : de nouveau, une loi des nœuds donne

$$i = i_1 + i_2 \quad \Rightarrow \quad i(\infty) = i_2(\infty)$$

Ce qui est bien observé sur le graphe.

Et finalement i correspond à la (b).

Remarque : on observe également graphiquement que $i = i_1 + i_2$.

2) Déterminer l'expression de $u_L(t = 0^+)$.

Correction

Puisque $i_2(0^+) = 0$ (par continuité), alors $i(0^+) = i_1(0^+)$. Les deux résistances sont parcourues par la même intensité et on peut donc appliquer le pont diviseur de tension de $R/2$.

$$\boxed{u_L(0^+) = \frac{R/2}{R+R/2}\,E = \frac{E}{3}}$$

3) Déterminer l'expression de u_∞, la valeur de $u_L(t \to \infty)$.

Correction

La bobine devient équivalente à un fil, donc $\boxed{u_\infty = 0}$

4) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u_L(t)$ est :

$$\frac{du_L}{dt} + \frac{R}{3L}\,u_L(t) = 0$$

Correction

On part de la loi des mailles :

$$\begin{aligned}
&E = Ri + u_L \\
&E = R\,(i_1 + i_2) + u_L && \leftarrow\ i = i_1 + i_2 \\
&0 = R\left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right) + \frac{du_L}{dt} && \leftarrow\ \frac{d}{dt} \\
&0 = R\left(\frac{2}{R}\,\frac{du_L}{dt} + \frac{u_L}{L}\right) + \frac{du_L}{dt} && \leftarrow\ u_L = \frac{Ri_1}{2} \quad \text{et} \quad u_L = L\,\frac{di_2}{dt} \\
&\boxed{\frac{du_L}{dt} + \frac{u_L}{\tau} = 0} && \leftarrow\ \boxed{\tau = \frac{3L}{R}}
\end{aligned}$$

5) En déduire l'expression de $u_L(t)$ et tracer son allure.

Correction

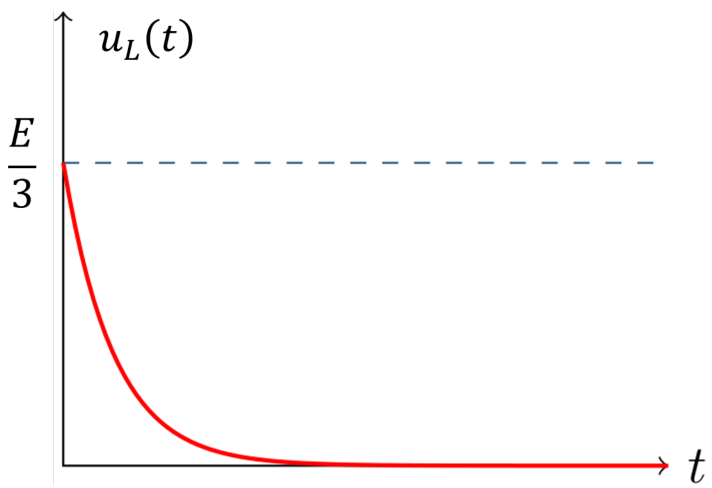
Forme générale :

$$u_L(t) = A\,e^{-t/\tau}$$

Avec la condition initiale :

$$u_L(0^+) = \frac{E}{3} = A \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_L(t) = \frac{E}{3}\,e^{-t/\tau}}$$

Graphe :



6) On mesure $\tau = 30$ µs. En déduire la valeur de L.

Correction

On a :

$$\tau = \frac{3L}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{R\tau}{3} = 10 \text{ mH}}$$

II) Moteur et récepteur de Lenoir

On considère la transformation cyclique de n moles de gaz parfait (de coefficient de Laplace γ), suffisamment lentement pour que l'équilibre mécanique soit constamment réalisé avec le milieu extérieur. Lors d'un cycle le gaz subit, dans cet ordre, les trois transformations suivantes : [AB] une transformation isobare, [BC] une transformation isotherme et [CA] une transformation isochore.

On note (P_0, V_0, T_0) les paramètres d'états du point A et T_1 la température lors de la transformation isotherme.

7) Déterminer les paramètres d'états (P, V, T) des points B et C en fonction de P_0, V_0, T_0 et T_1.

Correction

[AB] est une transformation isobare de la température T_0 vers la température T_1, donc :

$$\boxed{P_B = P_0 \qquad T_B = T_1 \qquad V_B = \frac{nRT_1}{P_0} = \frac{T_1}{T_0}\, V_0}$$

[CA] est une transformation isochore de la température T_1 vers la température T_0, donc :

$$\boxed{V_C = V_0 \qquad T_C = T_1 \qquad P_C = \frac{nRT_1}{V_0} = \frac{T_1}{T_0}\, P_0}$$

8) Déterminer le travail des forces de pression W et la chaleur Q échangée avec le milieu extérieur pour chaque étapes, en fonction de n, R, γ, T_0 et T_1.

Correction

Pour l'étape [AB] :

$$W_{\text{AB}} = -\int_{V_{\text{A}}}^{V_{\text{B}}} P_0 \; dV = -P_0\,(V_{\text{B}} - V_{\text{A}}) = \boxed{-nR\,(T_1 - T_0)}$$

De plus,

$$\Delta U_{\text{AB}} = W_{\text{AB}} + Q_{\text{AB}} = \frac{nR}{\gamma - 1}\,(T_1 - T_0)$$

On en déduit :

$$Q_{\text{AB}} = \frac{nR}{\gamma - 1}\,(T_1 - T_0) + nR\,(T_1 - T_0) = \boxed{\frac{\gamma nR}{\gamma - 1}\,(T_1 - T_0)}$$

Pour l'étape [BC] :

$$\Delta U_{\text{BC}} = C_v \Delta T = 0 = W_{\text{BC}} + Q_{\text{BC}}$$

Donc :

$$W_{\text{BC}} = -Q_{\text{BC}} = -\int_{V_{\text{B}}}^{V_{\text{C}}} P \; dV = -nRT_1 \int_{V_{\text{B}}}^{V_{\text{C}}} \frac{dV}{V} = \boxed{-nRT_1 \, \ln\!\left(\frac{T_0}{T_1}\right)}$$

Pour l'étape [CA] :

$$\boxed{W_{\text{CA}} = -\int_{V_{\text{A}}}^{V_{\text{C}}} P \; dV = 0}$$

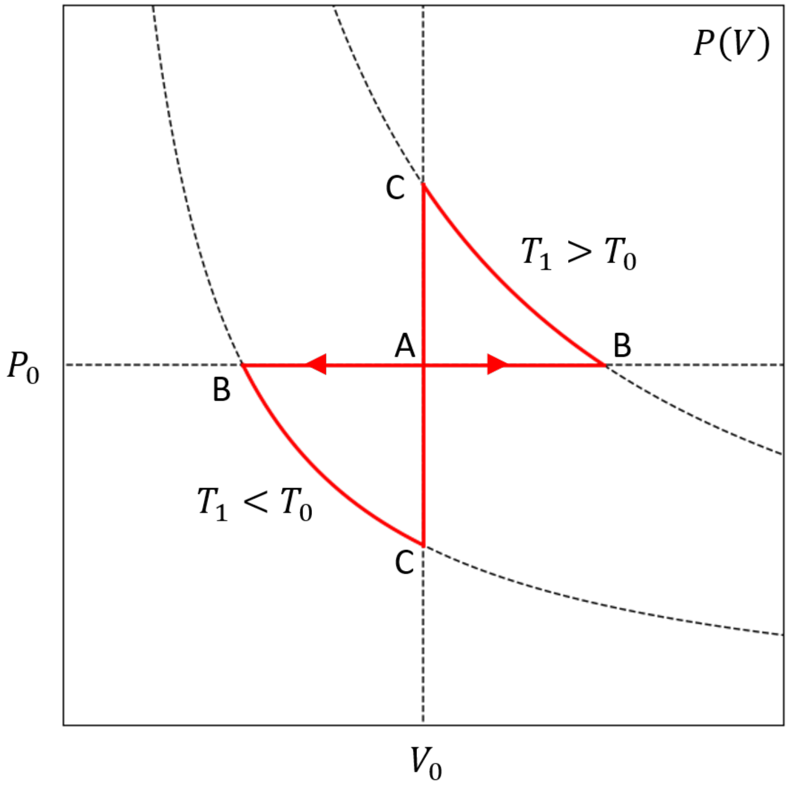
On en déduit :

$$\Delta U_{\text{CA}} = \boxed{Q_{\text{CA}} = \frac{nR}{\gamma - 1}\,(T_0 - T_1)}$$

9) Représenter le cycle dans un diagramme de Clapeyron pour $T_1 > T_0$ et pour $T_1 < T_0$. Ces cycles décrivent-ils un moteur ou un récepteur ?

Correction

Selon la valeur de T_1, nous pouvons avoir les deux cycles ci-dessous.



On voit graphiquement que les deux cycles sont parcourus dans le sens trigonométrique (cycle récepteur). Cela se vérifie également en regardant le signe du travail du cycle :

$$\begin{aligned} W_{\text{cycle}} &= W_{\text{AB}} + W_{\text{BC}} + W_{\text{CA}} \\ &= -nR\,(T_1 - T_0) - nRT_1\,\ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) \\ &= nRT_1\Big(x - 1 - \ln(x)\Big) \quad \text{avec :} \quad x = \frac{T_0}{T_1} \\ &> 0 \end{aligned}$$

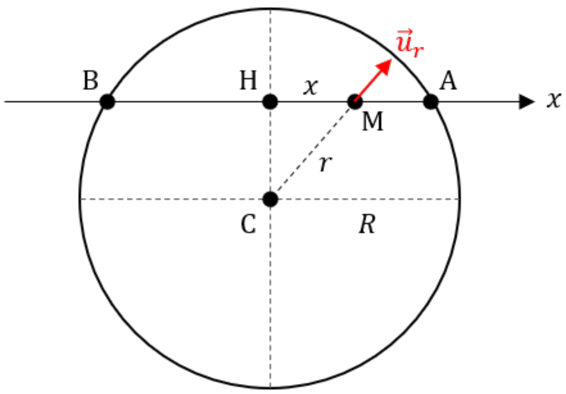
III) Tunnel terrestre

On admet que pour tout point M de masse m situé à l'intérieur de la Terre (de rayon R) à la distance r du centre C de la Terre, l'attraction terrestre est une force agissant sur ce point, dirigée vers le centre de la terre et de valeur (en coordonnées sphériques) :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{mgr}{R}\overrightarrow{u_r}$$

On considère un tunnel rectiligne AB, d'axe (Hx) ne passant pas par C et traversant la Terre. On note d la distance CH du tunnel au centre de la Terre. Un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part de A sans vitesse initiale.

On prendra le point H comme origine de l'axe (Hx).



Données : $R = 6{,}4 \times 10^6$ m, $d = 5 \times 10^6$ m et $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

10) Déterminer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ (en fonction de la variable r) puis $\mathcal{E}_p(x)$ (en fonction de la variable x) de M, en choisissant la constante d'intégration de sorte que $\mathcal{E}_p(x = 0) = 0$.

Correction

On rappelle le lien entre force et énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_p = \frac{mg}{2R}\, r^2 + cte}$$

Or, d'après le théorème de Pythagore,

$$r^2 = x^2 + d^2$$

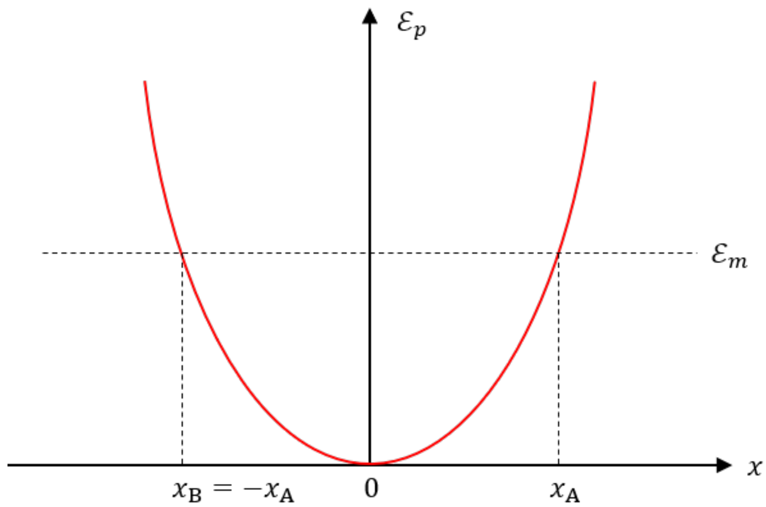
Enfin, on choisit la constante pour que $\mathcal{E}_p(0) = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{E}_p(x) = \frac{mg}{2R}\, x^2}$$

11) Tracer $\mathcal{E}_p(x)$.

Correction

Il s'agit d'une parabole.



12) Quelle est la vitesse maximale atteinte par M au cours du mouvement ?

Correction

La vitesse est maximale lorsque l'énergie potentielle est minimale, donc au point H d'abscisse $x = 0$.

D'après le théorème de Pythagore dans CHB,

$$R^2 = x_A^2 + d^2$$

D'après la conservation de l'énergie mécanique entre A et H :

$$\mathcal{E}_m = cte = \frac{mg}{2R}\ x_A^2 = 0 + \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{max} = \sqrt{\frac{g}{R}\left(R^2 - d^2\right)} = 5\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}}$$

13) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. La résoudre.

Correction

On applique le théorème de la puissance mécanique :

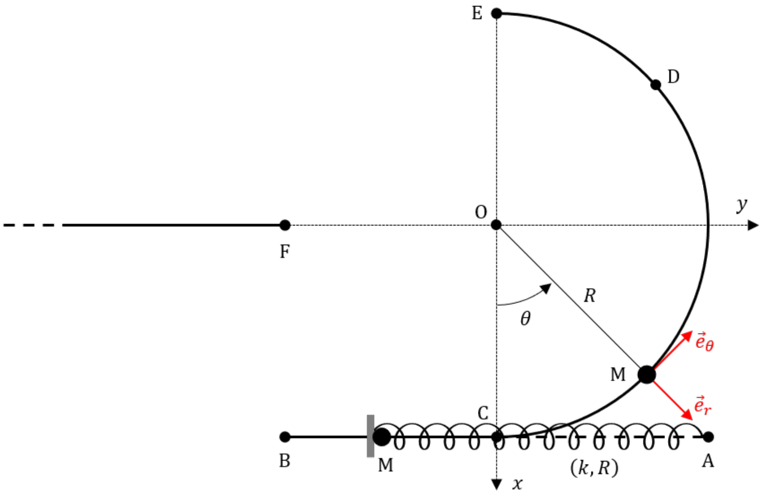
$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{x}\ddot{x} + \frac{mg}{R}x\dot{x} = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2\ x = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}}$$

IV) Un jeu d'enfant

On considère le jeu d'enfant suivant.



Une bille (point M de masse m supposée ponctuelle) circule sur une piste BCEF. Cette piste est constituée : d'une partie rectiligne BC de longueur R, d'un demi-cercle CE de rayon R et de centre O, et d'une seconde partie rectiligne commençant au point F (situé au dessus du point B, à gauche du point O).

Un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide R, relié d'un côté à un point fixe A (distance CA = R) et de l'autre à une plaque mobile.

Un enfant tire la plaque jusqu'au point B et place la bille M contre la plaque. Il lâche la plaque sans vitesse initiale, le ressort se contracte alors, propulsant la bille. La contact entre la bille et la plaque est rompu au point C : la bille s'engage dans la piste circulaire et le ressort est arrêté par une cale non représentée sur le schéma.

On néglige dans l'exercice toute source de dissipation d'énergie. Tous les résultats sont à exprimer en fonction de k, R, m et g.

14) Déterminer l'expression de la vitesse v_C de la bille au point C.

Correction

On utilise la conservation de l'énergie mécanique entre B et C.

$$\frac{1}{2}k\left(2R - R\right)^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_C^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_C = \sqrt{\frac{kR^2}{m}}}$$

On étudie le mouvement dans la piste circulaire.

15) Déterminer, à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique de la bille, une relation reliant ω (vitesse angulaire) et θ.

Correction

Vitesse : $\overrightarrow{v} = R\omega \overrightarrow{u_\theta}$.

Énergie potentielle de pesanteur : $\mathcal{E}_p = -mgx = -mgR\cos(\theta)$.

On utilise la conservation de l'énergie mécanique entre C et M quelconque.

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{C}}^2 - mgR = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 - mgR\cos(\theta)$$

Ainsi,

$$\boxed{mR\omega^2 = kR + 2mg\Big(\cos(\theta) - 1\Big)}$$

16) En déduire l'expression de la réaction normale de la piste en fonction de θ.

Correction

On a :

- Poids : $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{u_x} = mg\Big(\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} - \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}\Big)$
- Réaction normale du support : $\overrightarrow{N} = -N\overrightarrow{u_r}$
- Accélération : $\overrightarrow{a} = R\dot{\omega}\overrightarrow{u_r} - R\omega^2\overrightarrow{u_\theta}$

On applique le PFD que l'on projette sur $\overrightarrow{u_r}$.

$$-mR\omega^2 = -N + mg\cos(\theta)$$

Avec la question précédente, on en déduit :

$$\boxed{N = kR + mg\Big(3\cos(\theta) - 2\Big)}$$

17) Déterminer l'angle θ_{D} du point D, point où la bille quitte le guide. En déduire une condition portant sur k pour que le point matériel parvienne au sommet E de la piste. On note k_0 le cas limite.

Correction

Au point D, la réaction normale du support s'annule.

$$0 = kR + mg\Big(3\cos(\theta_{\mathrm{D}}) - 2\Big) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\theta_D) = \frac{2}{3} - \frac{kR}{3mg}}$$

Pour que la point D coïncide avec le point E, il faut que $\theta_{\mathrm{D}} = \pi$.

$$-1 = \frac{2}{3} - \frac{k_0 R}{3mg} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_0 = \frac{5mg}{R}}$$

Pour atteindre le point E, il faut donc que $\boxed{k > k_0}$.

On suppose la suite que $k = k_0$. On étudie le mouvement après la point E.

18) Déterminer l'équation du mouvement lorsque de la chute libre.

Correction

La vitesse au point E vaut, dans ce cas limite :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}mv_{\mathrm{C},0}^2 - mgR = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{E},0}^2 + mgR \\ \Rightarrow\ &\frac{1}{2}k_0R^2 - mgR = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{E},0}^2 + mgR \\ \Rightarrow\ &\frac{5mgR}{2} - mgR = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{E},0}^2 + mgR \\ \Rightarrow\ &\boxed{v_{\mathrm{E},0} = \sqrt{gR}} \end{aligned}$$

La bille n'est soumise qu'à sont poids durant la chute libre. On pose $t = 0$ le temps où M = E. Les conditions initiales de la chute sont :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OM}} &= R\overrightarrow{u}_r = -R\overrightarrow{u}_x \\ \overrightarrow{v} &= \sqrt{gR}\,\overrightarrow{u}_\theta = -\sqrt{gR}\,\overrightarrow{u}_y \end{aligned}$$

Le PFD donne :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= g \\ \ddot{y} &= 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} &= gt \\ \dot{y} &= -\sqrt{gR} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x &= \dfrac{gt^2}{2} - R \\ y &= -\sqrt{gR}\,t \end{cases}}$$

19) Le jouet peut-il tomber entre F et O ? On suppose de plus qu'il conserve après l'atterrissage sur le plan horizontal la composante horizontale du vecteur vitesse qu'il avait à l'instant de l'atterrissage. Déterminer l'expression de sa vitesse sur le plan horizontal en fonction, entre autres, de v_0.

Correction

Lorsque $x = 0$:

$$t = \sqrt{\frac{2R}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -R\sqrt{2} < -R}$$

Dans le cas limite, la bille tombe au-delà du point F. Donc même si $k > k_0$, la bille tombera toujours sur la piste.

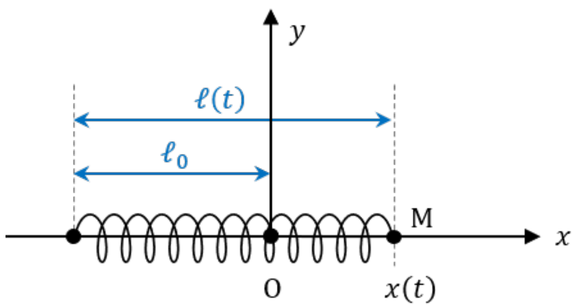
Puisque la bille conserve sa vitesse horizontale, $\boxed{v = -\sqrt{gR}}$ après atterrissage.

V) Masse ressort avec frottements solides

On considère une masse m, supposée ponctuelle au point M, située à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité est fixe. On note O l'origine du repère, situé à une distance ℓ_0 de l'extrémité fixe.

Le point M est soumis, en plus de la force de rappel élastique, à une force de frottement solide de coefficient $f_d = f_s = f$.

On introduit le paramètre $x_e = \dfrac{fmg}{k}$. On suppose que M est abandonné sans vitesse initiale à l'abscisse x_0 vérifiant $x_0 > x_e$.



20) Montrer que si $x \in [-x_e, x_e]$ et $\dot{x} = 0$, alors M reste immobile. Pour démontrer ce résultat, on distinguera les cas $x > 0$ et $x < 0$.

Correction

On étudie le système M assimilé à un point matériel dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On suppose que $x > 0$. Dans ce référentiel, le système est soumis à :

- Son poids : $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u}_y$
- La force de rappel élastique : $\overrightarrow{F} = -k(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u}_x = -kx\overrightarrow{u}_x$
- La réaction normale : $\overrightarrow{N} = N\overrightarrow{u}_y$
- La réaction tangentielle (hypothèse de non glissement) : $\overrightarrow{T} = T\overrightarrow{u}_x$ avec $T \leq fN$

On suppose que M reste immobile. Le PFD donne :

$$\begin{cases} 0 = -kx + T \\ 0 = -mg + N \end{cases}$$

Cette hypothèse de non glissement reste vraie tant que :

$$T \leq fN \quad \Rightarrow \quad kx \leq mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{x < x_e}$$

Le même raisonnement en supposant que $x < 0$ donne :

$$\begin{cases} 0 = -kx - T \\ 0 = -mg + N \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -kx \leq mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{x > -x_e}$$

On en déduit que si M est immobile dans la plage $[-x_e, x_e]$, alors il restera immobile.

Ainsi, si au cours du mouvement ces conditions sont remplies, alors le mouvement s'arrête. L'intervalle $[-x_e, x_e]$ s'appelle la **plage de stabilité** de l'oscillateur.

21) Établir l'équation différentielle vérifiée par M lors de la première phase du mouvement, celle où M glisse vers les x décroissants.

Correction

On étudie le système M assimilé à un point matériel dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Dans ce référentiel, le système est soumis à :

- Son poids : $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_y}$
- La force de rappel élastique : $\overrightarrow{F} = -k\left(\ell - \ell_0\right)\overrightarrow{u_x} = -kx\overrightarrow{u_x}$
- La réaction normale : $\overrightarrow{N} = N\overrightarrow{u_y}$
- La réaction tangentielle (s'oppose au glissement qui a lieu selon $-\overrightarrow{u_x}$) : $\overrightarrow{T} = T\overrightarrow{u_x} = fN\overrightarrow{u_x}$

Le PFD donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + fN \\ 0 = -mg + N \end{cases} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx + fmg$$

On en déduit :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 \, x(t) = fg \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

22) Déterminer la solution complète de cette équation différentielle.

Correction

Solution :

$$x(t) = \underbrace{A \, \cos(\omega_0 t) + B \, \sin(\omega_0 t)}_{\text{SEH}} + \underbrace{x_e}_{\text{SP}}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0^+) = x_0 = A + x_e \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = x_0 - x_e > 0} \\ \dot{x}(0^+) = 0 = \omega_0 B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{x(t) = (x_0 - x_e)\cos(\omega_0 t) + x_e}$$

23) Déterminer l'expression de x_1, la position où la vitesse s'annule.

Correction

La vitesse s'annule lorsque x est minimal, c'est-à-dire lorsque le coinus vaut -1.

$$\boxed{x_1 = x\left(\frac{T_0}{2}\right) = -x_0 + 2x_e}$$

On suppose que x_1 n'est pas dans la plage de stabilité.

24) Établir l'équation différentielle vérifiée par M lors de la deuxième phase du mouvement, celle où M glisse vers les x croissants.

Correction

On étudie le système M assimilé à un point matériel dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Dans ce référentiel, le système est soumis à :

- Son poids : $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u}_y$
- La force de rappel élastique : $\overrightarrow{F} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u}_x = -kx\,\overrightarrow{u}_x$
- La réaction normale : $\overrightarrow{N} = N\,\overrightarrow{u}_y$
- La réaction tangentielle (s'oppose au glissement qui a lieu selon $-\overrightarrow{u}_x$) : $\overrightarrow{T} = -T\,\overrightarrow{u}_x = -fN\,\overrightarrow{u}_x$

Le PFD donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx - fN \\ 0 = -mg + N \end{cases} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx - fmg$$

On en déduit :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2\, x(t) = -fg \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

25) Déterminer la solution complète de cette équation différentielle puis déterminer l'expression de x_2, la position où la vitesse s'annule.

Correction

On redéfinit l'origine des temps. On appelle $t = 0$ le temps où $x = x_1$.

Solution :

$$x(t) = \underbrace{A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t)}_{\text{SEH}}\ \underbrace{-x_e}_{\text{SP}}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0^+) = x_1 = A - x_e \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = x_1 + x_e = -x_0 + 3x_e} \\ \dot{x}(0^+) = 0 = \omega_0 B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{x(t) = (-x_0 + 3x_e)\cos(\omega_0 t) - x_e}$$

La vitesse s'annule lorsque x est maximal, c'est-à-dire lorsque le coinus vaut -1.

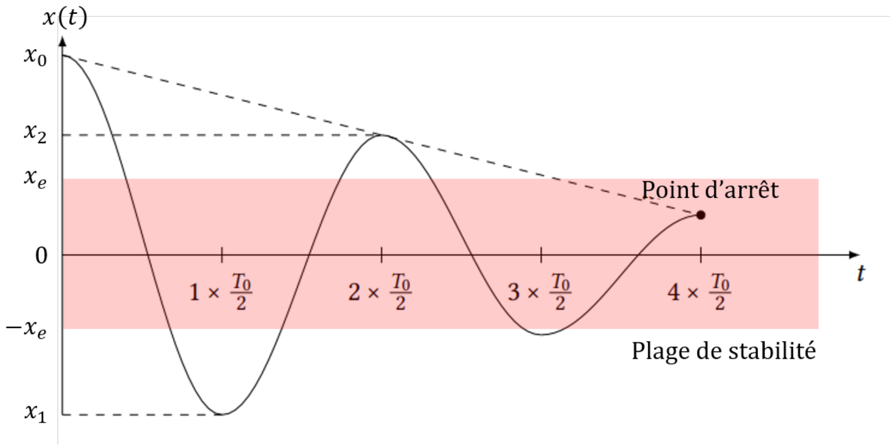
$$\boxed{x_2 = x\left(\frac{T_0}{2}\right) = x_0 - 4x_e}$$

On peut généraliser aisément les résultats précédents et montrer que :

$$x_n = \begin{cases} x_0 - 2nx_e & \text{si } n \text{ entier naturel pair} \\ -x_0 + 2nx_e & \text{si } n \text{ entier naturel impair} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_n = (-1)^n\left(x_0 - 2nx_e\right)}$$

26) Tracer l'allure de $x(t)$ et commenter les différences entre une force de frottement fluide (dans le cas d'un régime pseudo-périodique) et de frottement solide.

Correction



Alors que l'enveloppe du mouvement est exponentielle dans le cas du frottement fluide, on constate ici que l'enveloppe est affine